

**Вказівки до розв'язування завдань I етапу Всеукраїнської олімпіади
з математики
2025/2026 навчальний рік**

Кожна задача оцінюється в 7 балів

10 клас

1. Обчисліть значення виразу $\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + k \cdot 2k \cdot 4k}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + k \cdot 3k \cdot 9k}}$, якщо $k = 2026$.

Розв'язання.
$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \dots + k \cdot 2k \cdot 4k}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \dots + k \cdot 3k \cdot 9k}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot (1 + 8 + \dots + k \cdot k \cdot k)}{27 \cdot (1 + 8 + \dots + k \cdot k \cdot k)}} =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

2. З'ясуйте, при яких значеннях параметра a параболи $y = x^2 + 2017x + a$ та $y = -x^2 + ax + 2017$ мають точку дотику.

Розв'язання. Параболи дотикаються, якщо вони мають рівно одну спільну точку, а тому рівняння $x^2 + 2017x + a = -x^2 + ax + 2017$ повинно мати єдиний корінь.

$$2x^2 + (2017 - a)x + (a - 2017) = 2017.$$

$$a = 2017, a = 2025.$$

Відповідь: $a = 2017, a = 2025$.

3. На галузевій конференції з інновацій зустрілися дві групи учасників: студенти-стажери та досвідчені ментори. Деякі пари «студент-ментор» вже мали попереднє віртуальне знайомство (через онлайн-платформи), а деякі бачилися вперше.

Під час сесії нетворкінгу (спілкування з метою налагодження зв'язків та напрацювання нових корисних контактів) відбулося дві дії:

- 1) Кожен студент-стажер підійшов для короткої розмови до кожного знайомого йому ментора щоб обговорити свій проєкт.
- 2) Кожен досвідчений ментор підійшов для знайомства та обміну контактами з кожним незнайомим йому студентом-стажером.

Загальна кількість професійних контактів (коротких розмов та обмінів контактами) між цими двома групами склала 207.

Скільки всього було студентів-стажерів і скільки менторів на конференції, якщо їхня загальна кількість не перевищувала 40?

Розв'язання. У кожній парі «студент-ментор» буде тільки один професійний контакт (якщо вони знайомі, то студент-стажер підійде для короткої розмови до кожного знайомого йому ментора, якщо ні – то кожен досвідчений ментор підійде для знайомства та обміну контактами з кожним незнайомим йому студентом-стажером), тому кількість професійних контактів $207 = s \cdot t$, де s – кількість студентів-стажерів, а t – кількість менторів.

Оскільки $s + t \leq 40$, а $207 = 1 \cdot 207 = 3 \cdot 69 = 9 \cdot 23$, то $s = 9, t = 23$ або навпаки.

4. Довжина основи АВ трапеції ABCD вдвічі більша від довжини основи CD і вдвічі більша від бічної сторони AD. Довжина діагоналі AC дорівнює **a**, довжина бічної сторони BC дорівнює **b**. Знайдіть площу трапеції ABCD.

Вказівка. Чотирикутник ADCM – ромб, діагоналі якого дорівнюють a і b , M – середина основи АВ.

Відповідь: $\frac{3}{4} ab$.