

**Завдання I етапу Всеукраїнської олімпіади з математики
2025/2026 навчальний рік**

11 клас

1. Порівняйте числа $\left(\frac{2025}{2026}\right)^5$ та $\left(\frac{2024}{2025}\right)^8$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned}\frac{2025}{2026} &= 1 - \frac{1}{2026}, \quad \frac{2024}{2025} = 1 - \frac{1}{2025}. \\ \frac{1}{2026} &< \frac{1}{2025}, \quad 1 - \frac{1}{2026} > 1 - \frac{1}{2025}. \\ \text{Отже, } \frac{2025}{2026} &> \frac{2024}{2025}.\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2025}{2026}\right)^5 > \left(\frac{2024}{2025}\right)^5 > \left(\frac{2024}{2025}\right)^8.$$

2. Знайдіть усі такі дійсні числа x , що не є цілими і при цьому задовольняють рівність

$$x + \frac{26}{x} = [x] + \frac{26}{[x]}$$

де $[x]$ – ціла частина числа x , тобто – найбільше ціле число, яке не перевищує x .

Розв'язання:

$$\begin{aligned}x + \frac{26}{x} &= [x] + \frac{26}{[x]}, \\ \frac{x^2[x] + 26[x] - x[x]^2 - 26x}{x[x]} &= 0, \\ (x - [x]) \cdot \frac{x[x] - 26}{x[x]} &= 0.\end{aligned}$$

Оскільки x не є цілим числом, то $x - [x] \neq 0$, а тому $\frac{x[x] - 26}{x[x]} = 0$.

$$\text{Звідси } x[x] = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = k, \\ k < x < k + 1, \\ kx = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{k}, \\ k < \frac{26}{k} < k + 1 \end{cases}$$

$$k = 5, x = \frac{26}{5} = 5,2$$

3. Данило та Злата виписують дванадцятицифрове число, записуючи цифри по черзі, починаючи від вищого розряду. Довести, що які б цифри не написав першим Данило, то Злата завжди зможе зробити так, щоб отримане число ділилось на 4.

Відповідь. Зможе. Вказівка. Якщо Данило 11 кроком пише парну цифру, то Злата пише 4. Якщо Данило 11 кроком пише непарну цифру, то Злата пише 2.

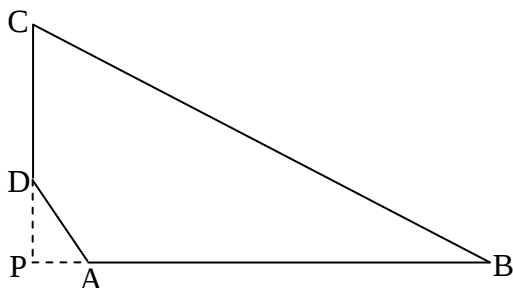
4. Обчисліть площу чотирикутника $ABCD$, у якого сторони $AB \perp CD$, $AB = 12$ см, $BC = 17$ см, $CD = 4$ см, $DA = 5$ см.

Розв'язання:

Нехай $PD = x$, $AP = y$ (див. мал.). Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x + 4)^2 + (y + 12)^2 = 289, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = 4$, $y = 3$. Далі знаходимо площу чотирикутника, яка дорівнює 54 см².



Кожна задача оцінюється в 7 балів