

**Вказівки до розв'язування завдань І етапу Всеукраїнської олімпіади з
математики
2025/2026 навчальний рік**

8 клас

1. Відмінні від нуля числа a, b задовольняють умови:

$$20a + 20b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$

Визначте, чому дорівнює значення виразу $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Розв'язання. З умови задачі маємо, що $20(a + b) = \frac{25(a+b)}{ab} = 25$.

Оскільки $a + b = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$, то $ab = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$. Враховуючі, що $a + b = ab$,

маємо, що

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = (a + b) - 2 = \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{3}{4}$.

2. Пан Петро та пан Микола, вийшли одночасно з одного і того самого будинку в один офісний центр. У Петра крок був на 20%, коротший, ніж у Миколи, але він встигав за цей час зробити на 20% кроків більше, ніж Микола. Хто з них раніше прийшов в офісний центр?

Розв'язання. Позначимо довжину кроку Миколи через x , тоді довжина кроку Петра дорівнює $0,8x$, оскільки крок Петра коротший на 20%.

Також позначимо кількість кроків Миколи через y , а кількість кроків Петра як $1,2y$, оскільки він встигав за цей час зробити на 20% кроків більше, ніж Микола.

Довжина шляху Миколи до офісу: $x \cdot y$

Довжина шляху, який за цей час подолає Петро: $0,8x \cdot 1,2y$

Порівнюємо вирази: $xy > 0,96xy$.

Отже, Микола дійде до офісу швидше.

3. Знайдіть натуральне число x за умови, що $x + 10$ і $x - 19$ є квадратами натуральних чисел.

Розв'язання. За умовою x – натуральне число та $x + 10 = m^2$ і $x - 19 = n^2$ є квадратами натуральних чисел: $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n) = 29$, 29 – просте, $29 = 1 \cdot 29$; $m + n$, а отже, і $m - n$, – натуральні, а тому $m - n = 1$, $m + n = 29$, звідки $m = 15$, $n = 14$. А тоді $x = 225 - 10 = 215$.

4. У трикутнику ABC $AB = AC$, $AE = AD$, $E \in AC$, $D \in BC$, $\angle BAD = 30^\circ$. Знайдіть градусну міру кута CDE .

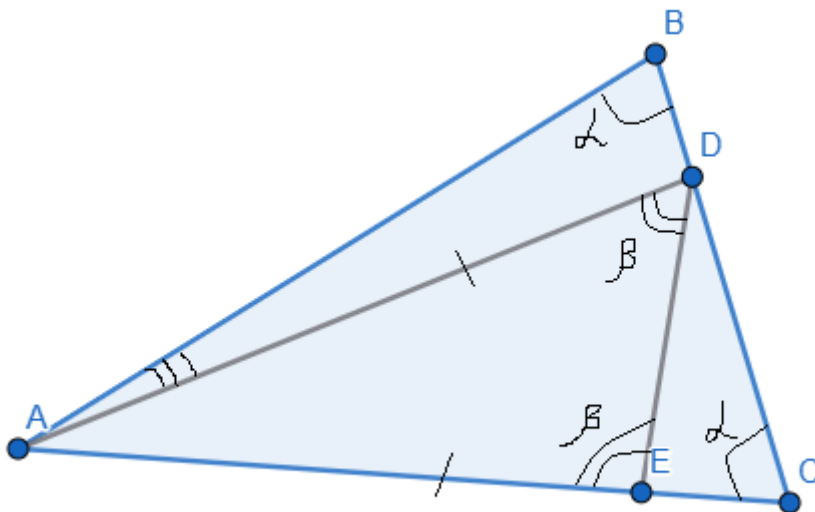
Розв'язання. Нехай $\angle ACB = \alpha$, а $\angle ADE = \beta$. Тоді $\angle ABC = \alpha$ і $\angle AED = \beta$.

$$\angle DAE = 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2\alpha - 30^\circ = 150^\circ - 2\alpha.$$

Звідси $\beta - \alpha = 15^\circ$.

$$\angle DEC = 150^\circ - 2\alpha + \beta.$$

$$\begin{aligned}\angle CDE &= 180^\circ - \alpha - (150^\circ - 2\alpha + \beta) = 30^\circ + \alpha - \beta \\ &= 30^\circ - (\beta - \alpha) = 15^\circ\end{aligned}$$



Кожна задача оцінюється в 7 балів